I/ الكهرباء الساكنة
ELECTROSTATIQUE

الكهرباء السّاكنة هي دراسة الظواهر الناتجة عن الشحنات الكهربائية في حالة السكون.

كلمة **كهرباء** مصطلح للكلمة الفرنسية « électricité » و هي بدورها مشتقة من الكلمة اليونانية « élektron » و التي تعني **عنبر**(ambre) ، حيث لاحظ طاليس من ميلي (Thalès de Milet) المولود بـــ إيوني (Ionie) – الساحل الغربي لتركيا الحديثة – و الذي عاش ما بين 625 و 545 قبل الميلاد ، لاحظ انجذاب هشيم التّبن إلى قطعة من العنبر الأصفر المدلوك بواسطة الصوف.

في العربية "**الكهربا**" هو صمغ شجرة إذا حكّ صار يجذب التبن و نحوه و منه اشتقّت كلمة "**الكهرباء**"

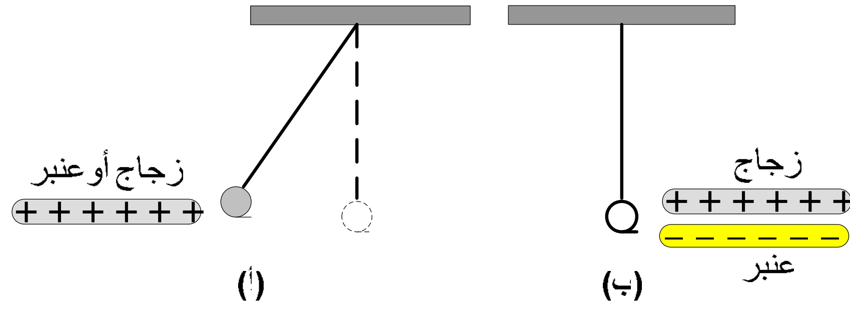
A/ المفاهيم الأساسية: (Notions fondamentales)

1/ تجارب التكهرب: (Expériences d'électrisation)

إذا قرّبنا المشط، بعد عملية المشط، من قصاصات الورق، نلاحظ أن القصاصات تنجذب إلى المشط. نفس الظاهرة تحصل عند دلكنا لقضيب من زجاج بواسطة قطعة من حرير أو قضيب من العنبر بواسطة قطعة من الصوف.

- **التجربة الأولى**: (الشكل 1.1-أ) نعلق كرية من البوليستيرين و نقرب لها قضيبا من زجاج أو من عنبر بعد دلكه مسبقا: القضيبان بعد ملامستهما الكرية ينفرانها. و عكس ذلك إذا قربنا القضيبين معا للكرة ، لا شيء يحدث. (الشكل1.1-ا)
- **التجربة الثانية**: (الشكل 2.1) إذا كانت الكريتان مكهربتين بفعل ملامستهما أحد القضيبين المدلوك فإنهما تتنافران. و بالعكس فإن الكريتين تتجاذبان إذا كانت كل منهما لامست قضيبا مدلوكا و مصنوعا من مادة مختلفة عن مادة الآخر.

نستنتج من هذه التجارب أن هذه المواد إكتسبت خاصية جديدة نسميها "**تكهرب**". هذه الخاصية تولّد تجاذبا أكثر شدة من التجاذب الكوني الحاصل بين كتلتين.



الشكل 1.1: تجربتان للتكهرب

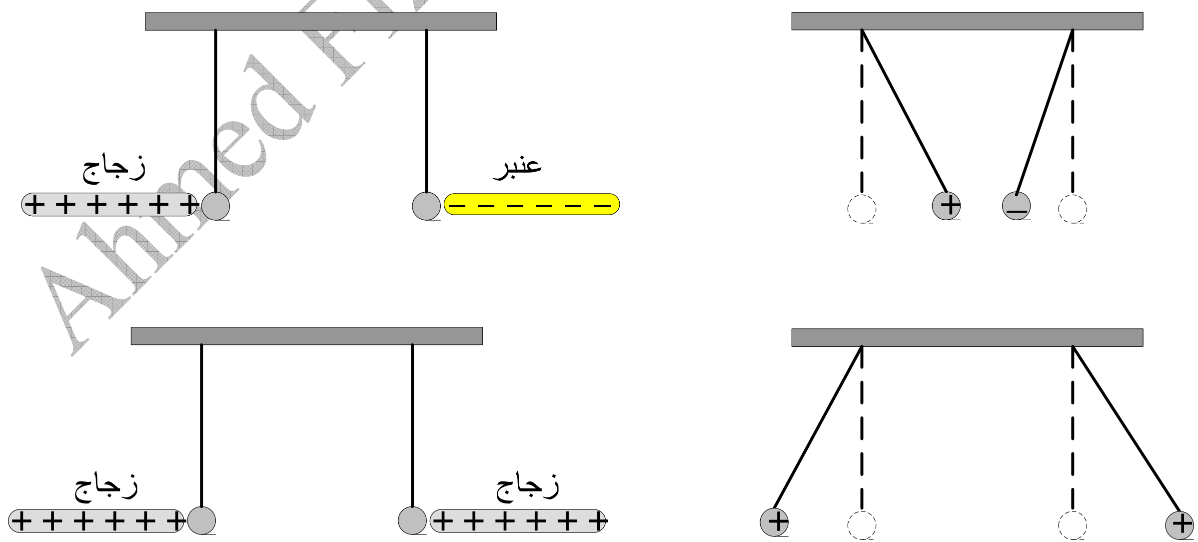
كل جسيمة تتميز أذن بخاصيتين مستقلتين و أساسيتين:

- كتلتها m
- شحنتها الكهربائية q.

تظهر تجارب بسيطة مثل التي وصفناها على وجود حالتين للتكهرب و الموافقة لصنفين من الشحن الكهربائية و الموصوفتين بـــ **شحنة موجبة** (+) و **شحنة سالبة** (−). يرجع هذا التصنيف إلى العالم بنجمين فرنكلان (1706−1790) (Benjamin Franklin) .

يتنافر جسمان يحملان شحنة كهربائية من نفس الإسم و يتجاذبان إذا كانا يحملان شحنتين كهربائيتين من اسمين مختلفين .

حسب الشكل 2.1 فإن كل كرية تتكهرب و تشحن بنفس الشحنة التي يحملها القضيب المدلوك الذي لامسها.



الشكل 2.1: التكهرب ، التجاذب و التنافر بين الشحنات

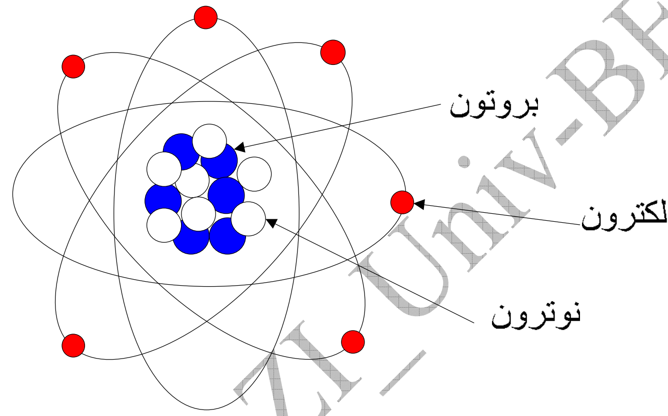
2/ الشحنة الأساسية و تكميم الشحنة الكهربائية:

(Charge électrique élémentaire et quantification de la charge électrique)

تجد الخصائص الكهربائية للمادة مبدأها على مستوى الذرة.

تتكون المادة كما هو معلوم من ذرات. كل ذرة تتكون من نواة(noyau) (تم اكتشافها سنة 1911 من قبل روثيرفورد(Ernest Rutherford of Nelson 1871-1937). تطوف حول النواة سحابة متشكلة من إلكترونات. هذه الإلكترونات تتنافر فيما بينها غير أنها تبقى متموقعة حول النواة. النواة متكونة من بروتونات (protons) تحمل شحنات موجبة و نوترونات (neutrons)عديمة الشحنة اكتشفت في 1932 من قبل شادفيك (James Chadwick 1891-1935).

يطلق على الجسيمات المشكلة للنواة اسم النوكليونات(nucléons) .



الشكل 3.1: شكل الذرة

الإلكترونات و البروتونات تحمل نفس الشحنة الكهربائية بالقيمة المطلقة و نرمز لها بـــ e. هذه الشحنة الكهربائية تسمى الشحنة الأساسية أو كم للشحنة الكهربائية:

$$e = 1,602.10^{-19}\ [A.s = C] \qquad (1.1)$$

القوى الكهربائية المطبقة بين البروتونات المشحونة إيجابا و الإلكترونات المشحونة سلبا هي المسئولة عن تماسك الذرات و الجزيئات. الذرات الغير مشرّدة (أي التي لم تفقد و لم تكسب إلكترونات) شحنتها الإجمالية معدومة.

لا يمكن لشحنة كهربائية أن تأخذ أي قيمة عددية كانت. و بالفعل فإن كل شحنة كهربائية هي مضاعف طبيعي للشحنة الأساسية:

$$q = \pm n.e\ \ [A.s = C]\ ,\ n \in N \qquad (2.1)$$

و هذا يترجم المبدأ الأساسي لتكميم الشحنة الكهربائية.

في جملة مغلقة ، المجموع الجبري للشحنات الكهربائية الموجودة ثابت خلال الزمن.

هذا ما ينصّ عليه مبدأ انحفاظ الشحنة الكهربائية للجملة المغلقة.

في الحقيقة أثبتت الدراسة الدقيقة لفيزياء الطاقات العليا أن البروتونات و النوترونات تتكون من جسيمات أساسية أخرى و تدعى كوارك (quark). غير أنه ، و حتى يومنا هذا ، لم يتمكن العلماء من عزلها ، و هي تحمل جزءا من الشحنة الأساسية نكتفي بذكر نوعين: $(u = +\frac{2}{3}e\ , \mathrm{d}= -\frac{1}{3}e)$.

مثال1.1:أحسب عدد الشحنات الأساسية المشكلة لشحنة مقدارها 1 كولومب.

الجواب: $n = \frac{1}{1,60.10^{-19}}$ **و منه** $625.10^{16} = \mathrm{n}$ شحنة أساسية.

3/ النواقل و العوازل: (conducteurs et isolants)

تتكون أي مادة من عدد كبير من الشحنات الكهربائية ، غير أن هذه الشحنات تتكافأ و تنعدم (عدد الإلكترونات = عدد البروتونات). في درجة الحرارة العادية ، تكون الشحنة الكهربائية للمادة معدومة. حين تحصل عملية تكهرب هذا يعني حدوث انتقال شحنات من جسم إلى آخر.

هذه الشحنة التي تظهر على الجسم بالزيادة أو بالنقصان هي المسئولة عن الأفعال الكهربائية التي تظهر على هذا الجسم(مثل القضيب المدلوك).

في ذرة ، تطوف الإلكترونات حول النواة وفق مدارات متباينة. إلكترونات الطبقات الخارجية و القابلة للتحرّر يمكنها المشاركة في الناقلية الكهربائية.

إذا كانت الطبقة الأخيرة لذرة عنصر كيميائي قريبة من التشبع فإنها لن تفقد أي إلكترون ، و إنما تحاول اكتساب إلكترون أو أكثر حتى تتشبع. مثل هذا العنصر يكون عازلا. و العكس إذا كانت الطبقة الخارجية بعيدة عن التشبع، فإن العنصر يفقد بسهولة إلكترونا أو أكثر. مثل هذا العنصر يكون ناقلا جيّدا.

و عليه فإن الناقل الجيد هو عنصر يحتوي على عدد كبير من الإلكترونات الحرة (أي الإلكترونات التي لها حرية الانتقال). و بالمقابل، فإن العازل هو العنصر الذي يملك عددا قليلا من الإلكترونات الحرة. العازل المثالي هو الذي لا يتوفر على أي إلكترون حرّ.

بقي أن نشير أن في السوائل حاملات الشحنة المتنقلة هي الشّوارد(ions).

نقول عن جسم أنه ناقل مثالي إذا كان بإمكان حاملات الشحنة - بعد تكهرب الجسم- أن تنتقل بكل حرية في كل الحجم المحتل من قبل المادة . و يكون الجسم عازلا إذا بقيت حاملات الشحنة في نفس الموضع الذي ظهرت فيه.

4/ تفسير ظاهرة التكهرب (Explication du phénomène d'électrisation)

كما سبق و أن ذكرنا فإن ذرّات المواد تحتوي في حالتها الطبيعية على عدد متساو من الإلكترونات و البروتونات فتكون معتدلة كهربائيا (غير مشحونة)، و لا تظهر أي تأثيرات كهربائية. أما إذا اختلّ هذا التوازن الطبيعي للشحنات– كأن يزداد عدد الإلكترونات أو ينقص لسبب من الأسباب–تصبح المادة مشحونة كهربائيا.

بصورة عامة، تفسر كل ظواهر التكهرب بانتقال الإلكترونات مع إهمال تغير الكتلة الذي يرافق عملية الانتقال.

فمثلا، الزجاج المدلوك يفقد إلكترونات فيتكهرب إيجابا. أما البلاستيك المدلوك يكتسب إلكترونات فيتكهرب سلبا.

B/ قانون كولومب–كافنديش:(Loi de Coulomb-Cavendish)

وضع العالم الفرنسي شارل أوغيستان دي كولومب (1736–1806) قانونه سنة 1785 غير أن ، و حسب تاريخ العلوم ، فإن هذا القانون كان أول من اكتشفه هو الإنجليزي هنري كافنديش (1731–1810) و بقي مجهولا بسبب عدم نشره في حينه. و لذا ، و للأمانة العلمية ، يحق تسمية هذا القانون بقانون كافنديش– كولومب. غير أننا نشير إليه في كل ما يتبع بقانون كولومب. (يرى المؤلف أن اسم Coulomb يكتب **كولومب** ونطقه أقرب للأصل).

1/ الدراسة الكيفية: (Etude qualitative)

للحصول على قياس كيفي لقوة التجاذب أو التنافر الكهربائية بين جسمين مشحونين يمكن تحقيق التركيب المبين على الشكل (4.1) و الذي يمثل جسيمتين نقطيتين تحملان شحنتين q_1 و q_2 كتلتاهما على التوالي m_1 و m_2 متباعدتين بالمسافة .

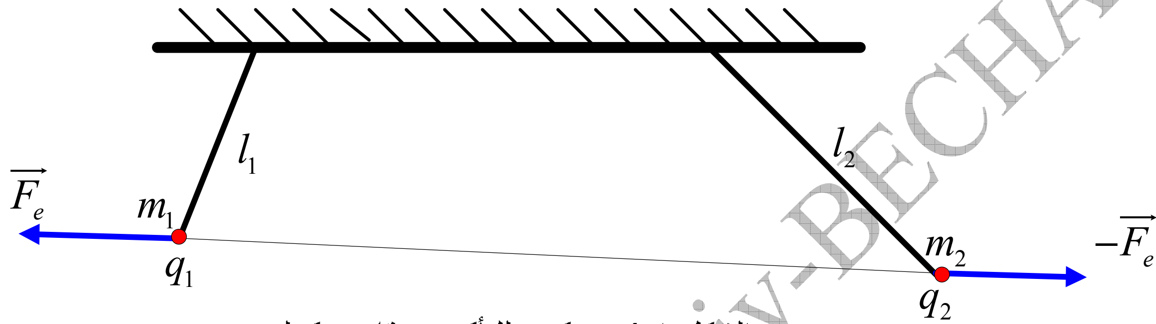
من خلال هذا التركيب نبين كيفيا الخصائص الأربعة التالية:

ا/ حامل القوة الكهربائية $\vec{F}_e$ هو المستقيم المار من الشحنتين،

ب/ شدة القوة $\vec{F}_e$ تتناسب عكسا مع مربع المسافة r الفاصلة بين الشحنتين،

ج/ القوة تتناسب طردا مع شحنة كل من الجسيمتين q_1 و q_2 ،

د/ من أجل مسافة معينة r بين الجسيمتين فإن شدة $\vec{F}_e$ مستقلة عن إشارة كل من الشحنتين.



الشكل 4.1: تركيب للتأكد من قانون كولومب

2/ الدراسة الكمية: (Etude quantitative)

عبارة قانون كولومب: القوة الكهروساكنة التي تؤثر بها الشحنة q_1 على الشحنة q_2 و العكس بالعكس; تعطى بالعلاقة التجريبية :

- **الشعاعية :**

$$\vec{F}_e = K.\frac{q_1.q_2}{r^2}\vec{u} \quad [\mathrm{N}]$$

حيث $\vec{u}$ يمثل شعاع الوحدة $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ (3.1)

- **السلمية :**

$$F_e = K.\frac{|q_1.q_2|}{r^2} \quad [\mathrm{N}] \qquad (4.1)$$

في الجملة الدولية الثابت K يعطى بالعبارة:

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ حيث ε_0 تمثل سماحية أو نفاذية الفراغ(permittivité du vide) .

القيمة التجريبية لـــ K هي:

$K = 8{,}9875.10^{+9}\left[\dfrac{Nm^2}{C^2}\right]$ نأخذ عمليا $K \simeq 9.10^{+9}\left[Nm^2C^{-2}\right]$

و منه فإن ε_0 تأخذ القيمة $\varepsilon_0 = 8{,}8542.10^{-12}\left[\dfrac{C^2}{N.m^2}\right]$ (5.1)

توجد عبارة أخرى لحساب ε_0 و هي: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2}$ حيث c يمثل سرعة انتشار الضوء في الفراغ $c = 3.10^8 ms^{-1}$.

مناقشة:

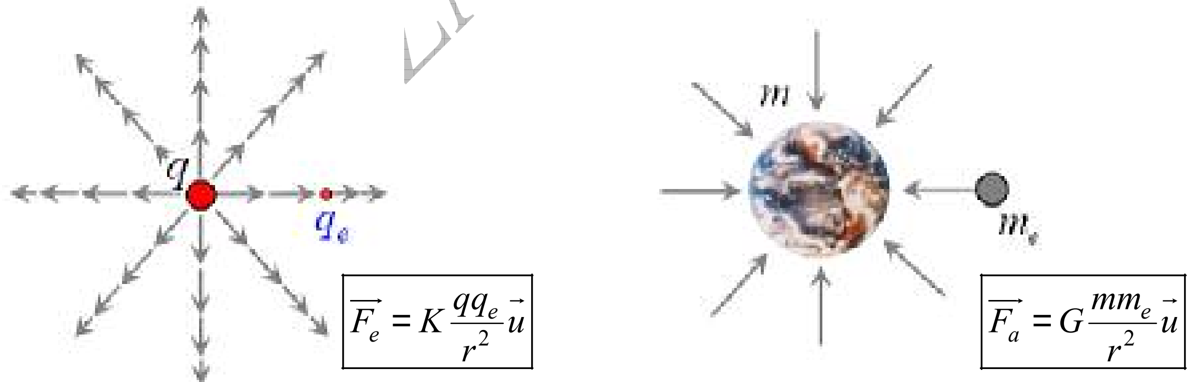
إذا كان :

$q_1.q_2 \succ 0$:الشحنتان لهما نفس الإشارة $\Leftarrow$ تنافر، $\vec{F}_e$ تباعد الشحنتين،

$q_1.q_2 \prec 0$:الشحنتان مختلفتا الإشارة $\Leftarrow$ تجاذب، $\vec{F}_e$ تقارب الشحنتين.

و حسب مبدأ الفعل و رد الفعل فإن $\vec{F}_{q_1} = -\vec{F}_{q_2}$.

تذكرنا عبارة قانون كولومب بعبارة قوة الجذب الكوني (أو العام) التي صادفناها في دروس الميكانيك. باستثناء القيمة العددية للثابت K، فإن هذا القانون له بالضبط نفس الخصائص الشعاعية لقوة الجذب الكوني (قانون نيوتن). و لهذا السبب فليس من الغريب أن نجد تشابها بين القانونين.



الشكل 5.1 : مقارنة بين قوة الجذب الكوني و القوة الكولومبية

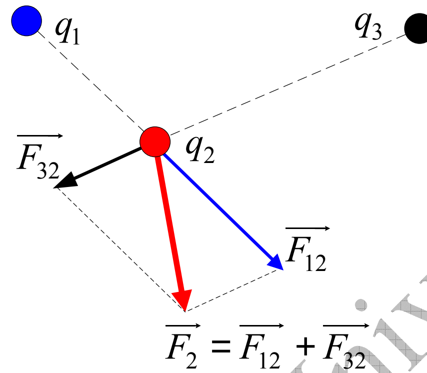
مثال 2.1: ما هي النسبة بين قوة الجذب الكوني و التنافر الكولومبي بين إلكترونين؟

الجواب: $\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{K\dfrac{e^2}{r^2}}{G\dfrac{m_e^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{K.e^2}{G.m_e^2}}\ ;\ \boxed{\dfrac{F_e}{F_g} \approx 4.10^{42}}$

مثال 3.1: ما هي قوة التنافر الكولومبي بين شحنتين من $1C$ متباعدتين بـــ $1km$؟

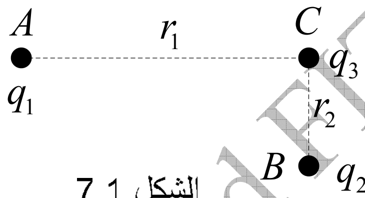
الجواب: $\boxed{F_e = 9.10^3\,N}$; $F_e = 9.10^9 \dfrac{1}{(10^3)^2}$; $\boxed{F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{q^2}{r^2}}$

ملاحظة: في الحالة العامة إذا كان لدينا n شحنة كهربائية في الفراغ فإن مبدأ التراكب (Principe de superposition) يسمح بالجمع الشعاعي للقوى الكهروساكنة. هذا المبدأ لا يصلح إلا في حالة الشحنات الساكنة فقط !!



الشكل 6.1: مبدأ تراكب القوى

مثال 4.1: أحسب شدة المحصلة المؤثرة على الشحنة q_3 انطلاقا من الشكل (7.1).



الشكل 7.1

$q_1 = -1,5mC$; $q_2 = 0,5mC$; $q_3 = 0,2mC$

$r_1 = AC = 1,2m$; $r_2 = BC = 0,5m$

الجواب: ننظر إلى الشكل 8.1:

بما أن $q_1.q_3 \prec 0$ فإن $\vec{F}_{13} \prec 0$ و هي قوة تجاذب،

و بما أن $q_2.q_3 \succ 0$ فإن $\vec{F}_{23} \succ 0$ و هي قوة تنافر.

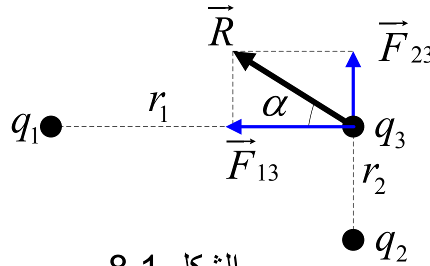
$$\vec{F}_{13} = -K\frac{q_1q_3}{r_1^2}\vec{u}_1 \; ; \; F_{13} = 9.10^9\frac{1,5.10^{-3}\times 0,2.10^{-3}}{(1,2)^2} \Rightarrow F_{13} = 1,875.10^3\,N$$

$$\vec{F}_{23} = K\frac{q_2q_3}{r_2^2}\vec{u}_2 \; ; \; F_{23} = 9.10^9\frac{0,5.10^{-3}\times 0,2.10^{-3}}{(0,5)^2} \Rightarrow F_{23} = 3,6.10^3\,N$$

$$R = \sqrt{F^2_{13} + F^2_{23}} \Rightarrow \boxed{R = 4,06.10^3\,N}$$

أما الزاوية التي تصنعها المحصلة $\vec{R}$ مع المستقيم AC فتحسب كما يلي:

$$\tan\alpha = \frac{F_{23}}{F_{13}} \quad ; \quad \tan\alpha = 1{,}92 \Rightarrow \boxed{\alpha = 62.49°}$$



الشكل 8.1

C/ الحقل الكهروساكن: (Champ électrostatique)

كون شحنتين متجاورتين تتأثران بقوتي تجاذب أو تنافر، يجرنا لاعتبار كل شحنة كهربائية تغيّر الخصائص الفيزيائية للمجال الفضائي المحيط بها. لوصف هذا التغيّر فإننا نقول أن كل شحنة كهربائية تولّد في المجال الفضائي من حولها **حقلا كهربائيا**.

1/ مفهوم الحقل الكهربائي: (Notion de champ électrique)

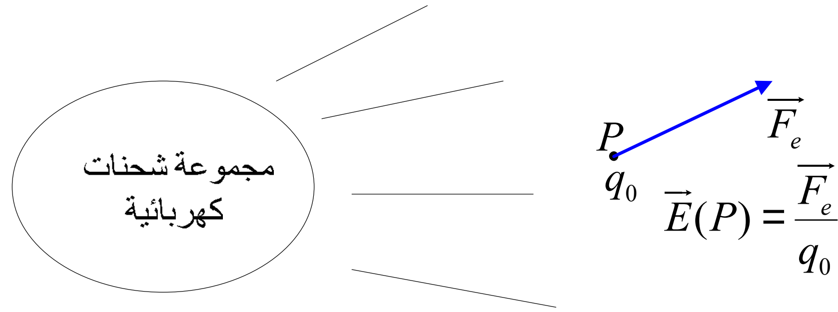
تعريف كيفي: نقول أنه يوجد حقل كهربائي في نقطة معينة من الفضاء إذا أثرت قوة كهروساكنة $\vec{F}_e$ على شحنة نقطية q_0 موضوعة في تلك النقطة.

تعريف كمي: نسمي الحقل الكهروساكن $\vec{E}$ ، النسبة بين القوة الكهروساكنة $\vec{F}_e$ و الشحنة الكهربائية q_0 **المتأثرة** بالقوة $\vec{F}_e$. الشكل 9.1

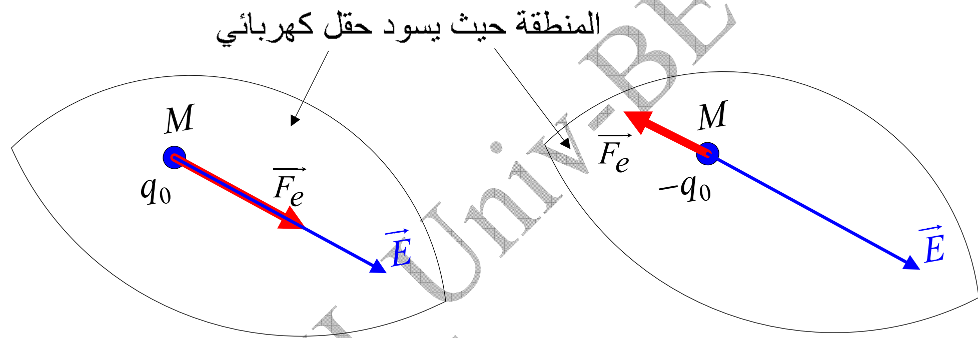
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}} \qquad (6.1)$$

في الجملة الدولية للوحدات نعبر عن الحقل الكهربائي بـالفولط على المتر Vm^{-1}.

بما أن $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$ فإن $\vec{E}(M)$ و $\vec{F}_e$ لهما نفس الحامل. أما الاتجاه في هذه الحالة فيتعلق بإشارة q_0 أي بالشحنة المتأثرة بالقوة $\vec{F}_e$. الشكل10.1



الشكل 9.1 : الحقل الكهربائي في نقطة من الفضاء



الشكل 10.1 : الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة

2/ الحقل الكهروساكن الناتج عن شحنة نقطية:

(Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle)

تعريف: إذا وجدت جسيمة شحنتها q في النقطة O فإنها تولد في كل نقطة M من الفضاء المحيط بها حقلا شعاعيا يسمى الحقل الكهروساكن المعبر عنه بالعبارة:

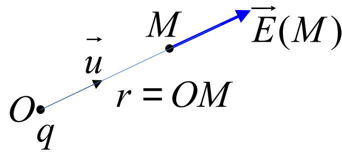
$$\vec{E}(M)=\frac{\vec{F}_e}{q_M}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad (7.1)$$

q: الشحنة **الموجودة** في النقطة O.

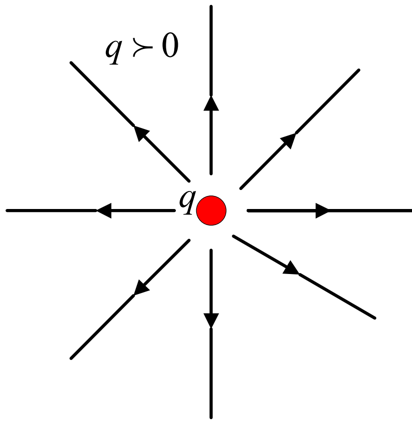
q_M: شحنة افتراضية موضوعة في النقطة M (ليس لها أي تأثير في حساب الحقل الكهربائي) و هي **المتأثرة** بالقوة $\vec{F}_e$.

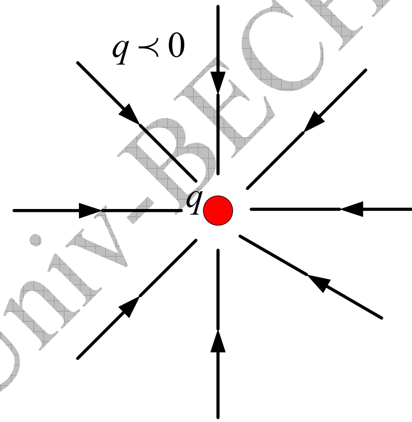
و باختصار فإن الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية يكون:
- قطريا : حامله يمر من الشحنة،
- موجها نحو الخارج إذا كانت $q \succ 0$ ،
- موجها نحو الداخل إذا كانت $q \prec 0$ ،
- شدته

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{|q|}{r^2} \qquad (8.1)$$



الشكل 11.1: الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية





الشكل 12.1: إتجاه الحقل الكهربائي في حالة شحنة موجبة و في حالة شحنة سالبة

3/ الحقل الكهربائي الناتج عن عدة شحنات نقطية:

(Champ électrique crée par un ensemble de charges ponctuelles)

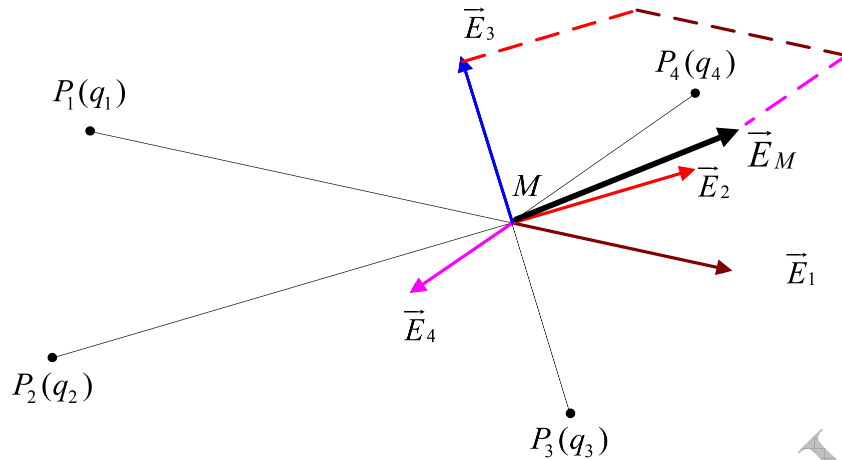
إذا كان لدينا الآن n جسيمة شحنها الكهربائية q_i ، الواقعة في النقاط P_i، فما هو الحقل الكهروساكن المتولد عن هذه المجموعة من الشحن في نقطة M؟

فكما هو الشأن بالنسبة للقوى ، فإن مبدأ التراكب صالح كذلك بالنسبة للحقل الكهربائي.

(و بما أنه مبدأ فلا يمكن البرهنة عليه و إنما يجد صحته في التجربة).

و منه فإن:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad (9.1)$$



الشكل 13.1 : تراكب الحقول الكهربائية في النقطة M

4/ الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة:

(Champ électrique crée par une distribution continue de charges)

في حالة عدد كبير من الشحنات، يمكن لها أن تكون موزعة توزيعا مستمرا على استقامة واحدة، على سطح مستو أو في حجم.

في مثل هذا التوزيع للشحنة فإن مبدأ التراكب يبقى صالحا. وعليه فيجب تجزئة هذا التوزيع إلى عدد لا متناهي من الأحجام أو السطوح أو القطع المستقيمة الصغيرة جدا و المشحونة ، ثم القيام بحساب العناصر الأساسية من الحقل $d\vec{E}$ المتولدة عن كل عنصر من تلك العناصر المشحونة ، ثم القيام بالجمع الشعاعي للحقول العنصرية $d\vec{E}$. و بما أننا نأخذ العناصر اللامتناهية الصغر فإننا نحول الجمع $(\sum)$ إلى تكامل ثلاثي $(\iiint)$ ، ثنائي $(\iint)$ أو عادي $(\int)$ و هذا حسب ما إذا كان لدينا حجم ، سطح أو طول.

و انطلاقا من ذلك نحصل على:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \qquad (10.1)$$

حذار من الاعتقاد أن $E = \int dE$ لأن $d\vec{E}$ عبارة عن أشعة.

في حالة جملة محاور كارتيزية O_{xyz} ، يكون لدينا :

$$d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k} \qquad (11.1)$$

وبعملية التكامل نصل إلى:

$$\vec{E} = \int\left(dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k}\right) = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k} \qquad (12.1)$$

و منه فأن :

$$E_x = \int dE_x \quad , \; E_y = \int dE_y \quad , \; E_z = \int dE_z \qquad (13.1)$$

و في كل الحالات فإن العبارة الواجب الاحتفاظ بها هي:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)} \qquad (14.1)$$

مع العلم أن:

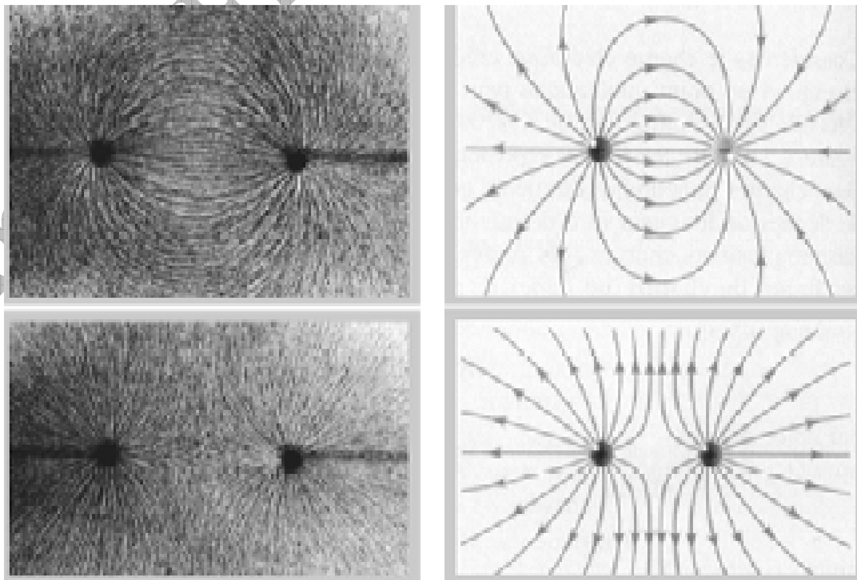
$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}} \qquad (15.1)$$

لتوضيح هذا المبدإ نقترح دراسة ثلاث تطبيقات شائعة لاحقا.

5/ خطوط الحقل الكهربائي(أو الطيف الكهربائي): (Lignes ou spectre de champ)

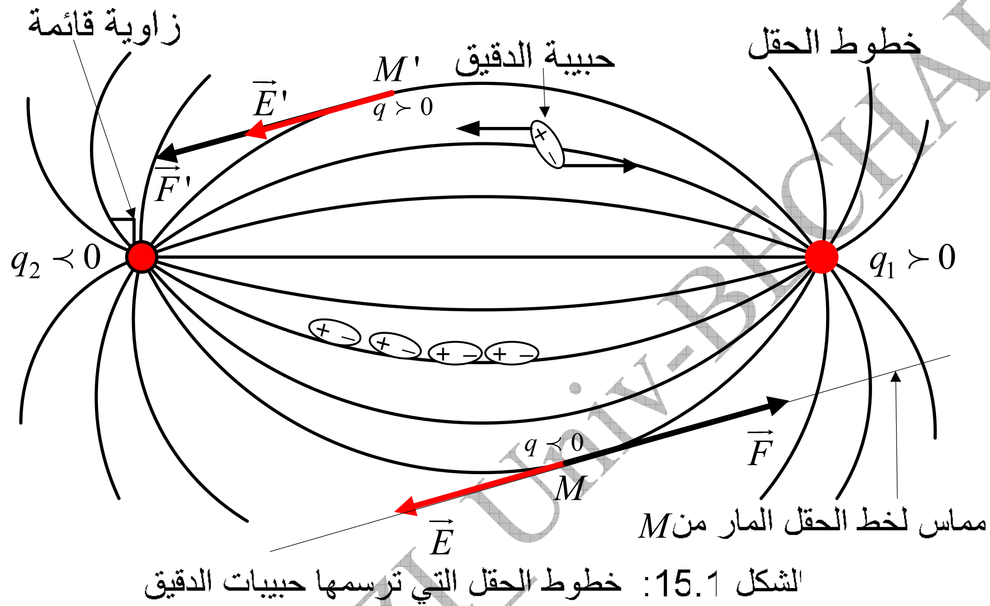
❖ **وصف تجربة:** بجوار مسريين مشحونين، الواحد إيجابا $(q_1 \succ 0)$ و الآخر سلبا $(q_2 \prec 0)$ ، نذرّ حبيبات الدقيق الغليظ (أو بذور العشب الطبيعي) على سطح من الزيت.

❖ **ملاحظة:** نلاحظ أن حبيبات الدقيق (أو بذور العشب الطبيعي) ترسم منحنيات نطلق عليها اسم خطوط الحقل الكهربائي. الشكل (14.1).



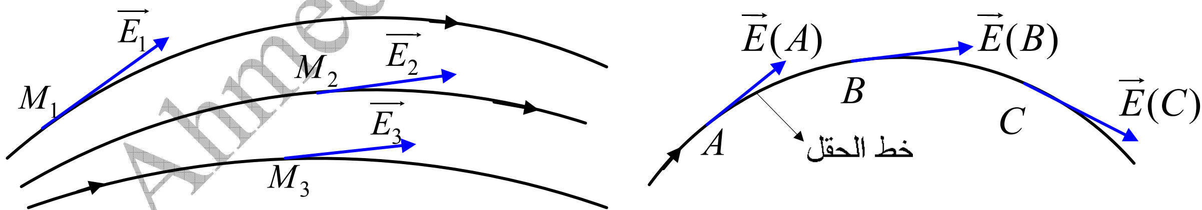
الشكل 14.1 : بذور العشب الطبيعي على سطح من الزيت،صورة و تمثيلا

❖ **تفسير:** تحت تأثير الحقل الناتج عن الشحنتين q_1 و q_2 فإن حبيبات الدقيق تستقطب. و هكذا تصبح كل حبيبة عبارة عن ثنائي قطب كهربائي بحيث تخضع الشحنات لقوة كهربائية مطبقة من قبل q_1 و q_2. هذه القوى لها فعل توجيه كل حبيبة موازاة للقوى الكهربائية. الشكل (15.1).



الشكل 15.1: خطوط الحقل التي ترسمها حبيبات الدقيق

تعريف: خطوط الحقل الكهربائي هي خطوط موجهة و مماسية في كل نقطة لشعاع الحقل $\vec{E}$. و هي خطوط تمر من الشحنة q. (الشكل 16.1)



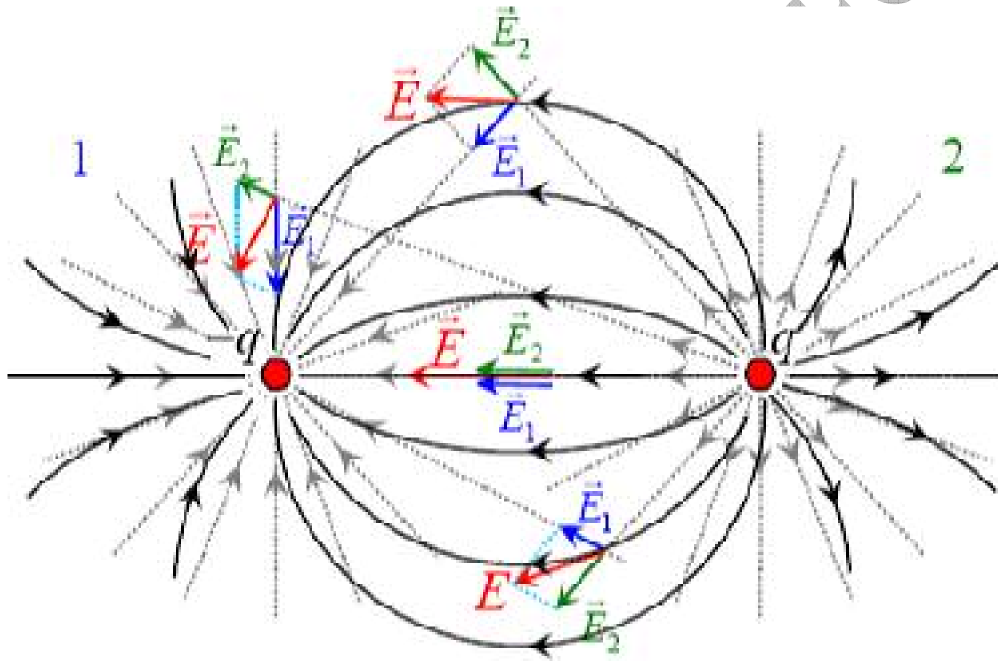
الشكل 16.1: خطوط الحقل الكهربائي

في حالة شحنة نقطية، فإن خطوط الحقل هي نصف مستقيمات تتقاطع في النقطة حيث تتمركز الشحنة. في حالة شحنة موجبة، الحقل يكون موجها نحو الخارج و نقول أنه مغادر و هو الأمر نفسه بالنسبة لخطوط الحقل. و العكس صحيح بالنسبة للشحنة السالبة و نقول أن الحقل يصل أو يرد. الشكل(17.1)



الشكل 17.1: خطوط الحقل الكهربائي لشحنة موجبة و لشحنة سالبة منفردتين

يمثل الشكل (18.1) خطوط الحقل حول شحنتين نقطيتين متجاورتين و متساويتين و مختلفتي الإشارة.



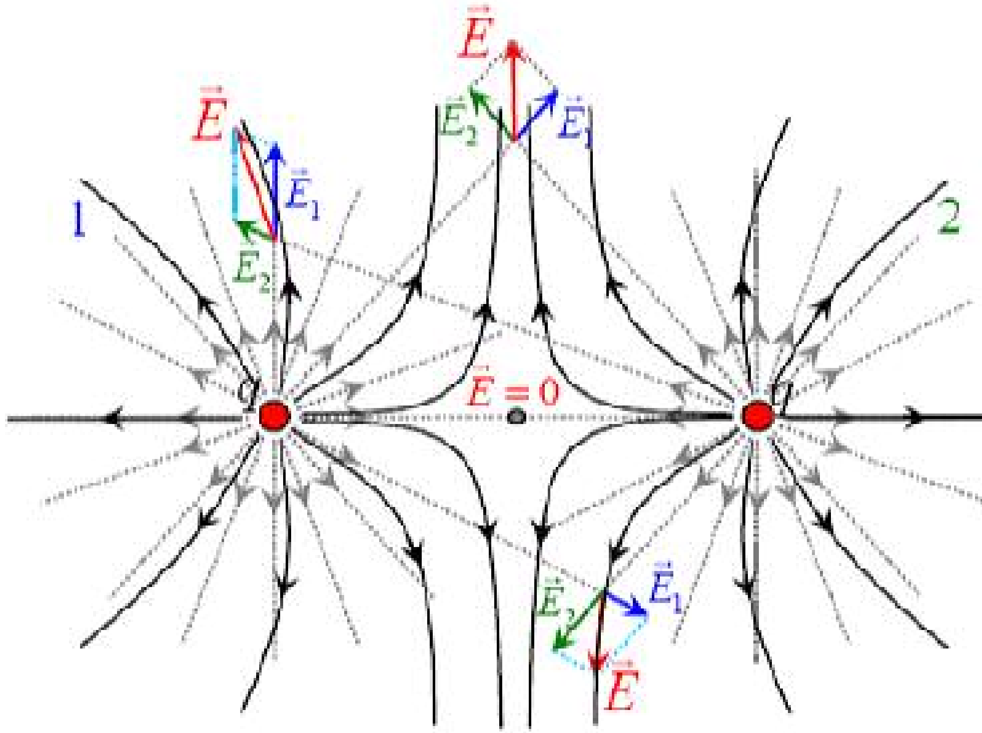
الشكل 18.1:خطوط الحقل لشحنتين متساويتين و متعاكستي الإشارة

كما يمثل الشكل(19.1) خطوط الحقل حول شحنتين نقطيتين متجاورتين و متساويتين و تحملان نفس الشحنة.

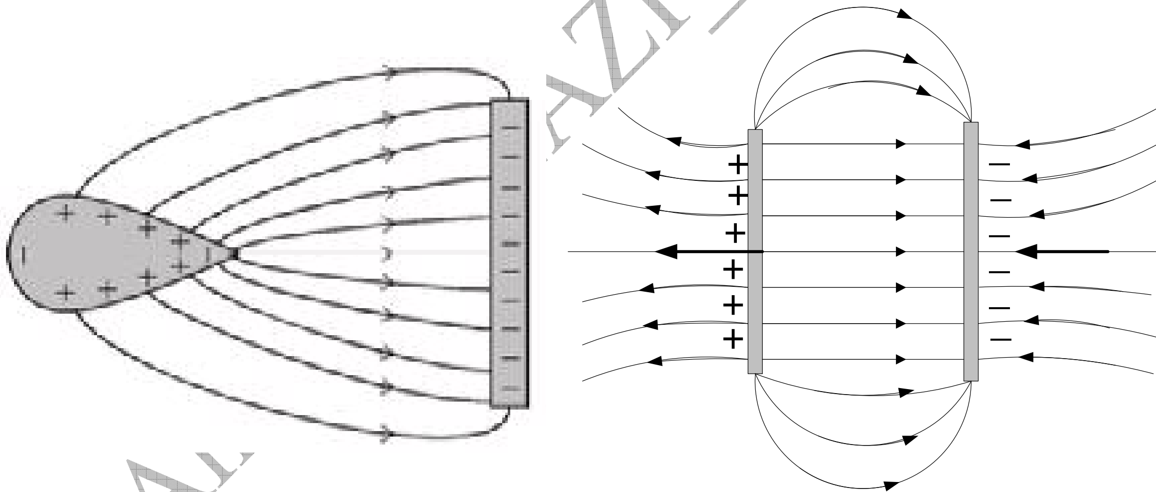
و يمثل الشكل (20.1) خطوط الحقل المنتظم (صفيحتان متوازيتان متقاربتان ومشحونتان الواحدة إيجابا و الأخرى سلبا، و بشحنتين متساويتين بالقيمة المطلقة).

باستثناء حافتي المكثفة، فإن خطوط الحقل داخل المكثفة متوازية، متعامدة مع كل من الصفيحتين، و متساوية الكثافة.

كما يمثل الشكل (21.1) خطوط الحقل لناقل حاد.



الشكل 19.1 : خطوط الحقل لشحنتين متساويتين



الشكل 21.1 : الحقل الكهربائي لناقل حاد

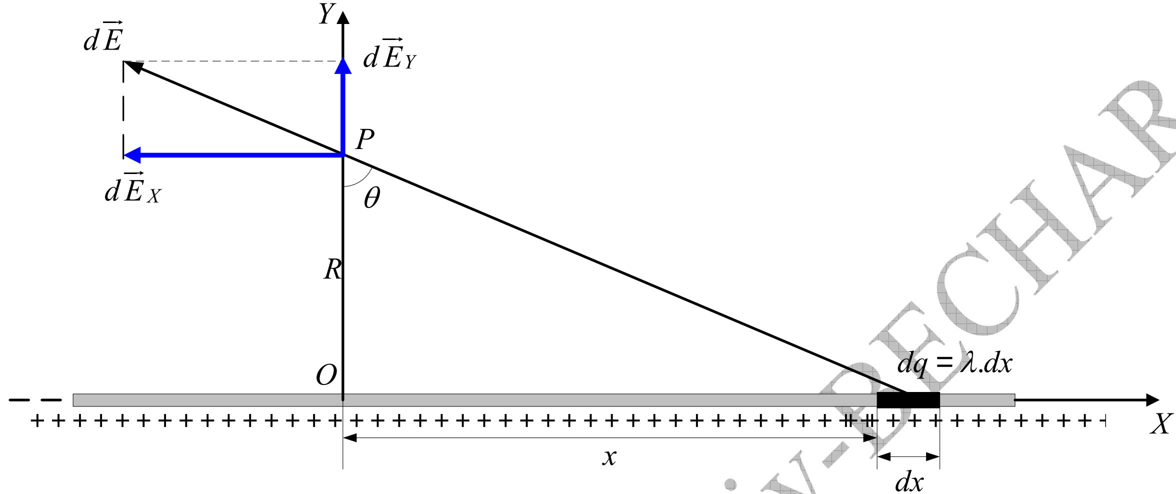
الشكل 20.1: خطوط الحقل الكهربائي المنتظم

6/ تطبيقات:

ا/ التطبيق الأول: الحقل الكهروساكن الناتج عن سلك رقيق لامتناهي الطول يحمل شحنة موجبة طولية كثافتها λ ثابتة.

المطلوب: حساب الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ المتولد في النقطة P الواقعة على محور السلك عن كامل الشحنة التي يحملها السلك.(الشكل22.1).

الحل:العنصر الصغير الواجب أخذه هو قطعة مستقيمة طولها dx تحمل الشحنة العنصرية: $dq = \lambda.dx$ ،



الشكل 22.1: الحقل الكهروساكن في النقطة P الناتج عن السلك المشحون

الحقل العنصري $d\vec{E}$ المتولد عن الشحنة dq يقع على امتداد القطعة المستقيمة و التي طولها r الواصلة بين P و dq.

بتطبيق العلاقة (14.1) نصل إلى:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda.dx}{r^2}$$

مع العلم أن:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

كما أن:

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\sin\theta$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE.\cos\theta$$

أي:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\sin\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\cos\theta$$

نلاحظ أن r,θ,x متغيرات، بينما R ثابت. نستنتج هندسيا أن:

$$x = R.tg\theta \Rightarrow dx = R.d\theta.\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$r = \frac{R}{\cos\theta}$$

تبعا لهذه النتائج نحصل على:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\sin\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R}.\sin\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[-\cos\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_x = 0}$$

هذه النتيجة $(\vec{E}_x = \vec{0})$ كانت متوقّعة بسبب التناظر في المسألة.

أما المركبة العمودية فتحسب بنفس الطريقة حيث:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\cos\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R}.\cos\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}}$$

أي أن في النهاية:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}\vec{j}}$$

نفس الطريقة إذا كان الأمر يتعلق بحلقة رقيقة. يمكن الاستعانة بحل التطبيق الثاني.

ب/ التطبيق الثاني: الحقل الكهروساكن الناتج عن قرص رقيق يحمل شحنة موجبة سطحية كثافتها ثابتة σ.

قرص مركزه O و نصف قطره R مشحون بانتظام بكثافة سطحية $\sigma \succ 0$. ليكن OX محور عمودي في النقطة O على القرص.

أحسب بدلالة x الحقل $\vec{E}$ في كل نقطة من المحور $X'X$.(علينا دراسة $x \succ 0\ ;\ x \prec 0\ ;\ x = 0$).

الحل: لتكن P نقطة من المحور OX حيث $OP = x$. لنحسب الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة السطحية في هذه النقطة. (الشكل23.1)

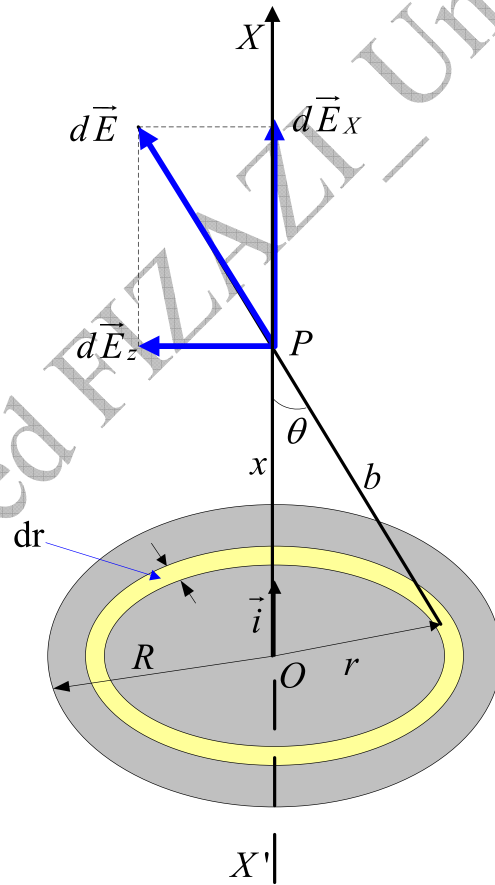
العنصر الصغير الواجب أخذه بعين الاعتبار هو إكليل (حلقة) عرضه dr و سطحه dS يحمل الشحنة العنصرية: $dq = \sigma.dS = \sigma.2\pi r.dr$

بتطبيق العلاقة (14.1) يمكن حساب الحقل العنصري $d\vec{E}$ المتولد عن الشحنة dq:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{b^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\sigma.2\pi rdr}{b^2}$$

مع العلم أن:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z$$



الشكل 23.1: الحقل الكهروساكن في النقطة P والناتج عن القرص المشحون

للحصول على الحقل الناتج عن كل القرص نكامل من 0 إلى R.

نرى أن:

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\cos\theta$$
$$E_z = \int dE_z = \int dE.\sin\theta$$

نظرا لتناظر المسألة فإن:

$$\boxed{\overrightarrow{E_z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \overrightarrow{E_x}}$$

نترك للطالب فرصة التحقق بالحسابات من أن $\overrightarrow{E_z} = \vec{0}$

$$E_x = \frac{\sigma.2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r.dr}{b^2}.\cos\theta$$

نلاحظ من خلال الشكل أن:

$$b^2 = x^2 + r^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

تبعا لهذه النتائج نحصل على:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int \frac{x.r.dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r.dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma.x}{2\varepsilon_0}.\left[\frac{-1}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^R$$

في النهاية:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+R^2)}}\right]}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \overrightarrow{E_x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\vec{i}} \rightarrow (1)$$

مناقشة:

$$x \succ 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{i} \rightarrow (2)$$

$\vec{E}$ موجه وفق $\vec{i}$ و يبتعد عن الشحنات الموجبة.

$$x \prec 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{i} \rightarrow (3)$$

$\vec{E}$ عاكس $\vec{i}$ و يبتعد من الشحنات الموجبة.

للحصول على عبارة $\vec{E}$ من أجل $x=0$ لا بد من القيام من دراسة نهاية المعادلة (2) أو المعادلة (3) لما يؤول x إلى الصفر. نجد:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

ج/ التطبيق الثالث: الحقل الكهروساكن الناتج عن مستوى لا متناهي يحمل شحنة موجبة سطحية كثافتها ثابتة σ.

هنا السطح العنصري هو عبارة عن حلقة نصف قطرها r و سمكها dr و مركزها O. (الشكل 24.1)

هذه الحلقة تولد حقلا كهربائيا شاقوليا في النقطة P (المركبات الأفقية تنعدم مثنى مثنى نتيجة التناظر)، $\overrightarrow{E_x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \overrightarrow{E_y}$ و على الطالب أن يتحقق من هذه النتيجة.

الشكل 24.1: حقل سطح لا متناهي الأبعاد

نلاحظ من الشكل أن: $dE_y = dE.\cos\theta$

الحلقة تحمل الشحنة الكلية: $dq = dS.\sigma = 2\pi r.dr.\sigma$

و منه فإن الحقل العنصري المتولد في النقطة P عن الحلقة هو:

$$dE = dE_y = K.\frac{dq}{b^2}.\cos\theta = K.\frac{2\pi r.dr.\sigma}{\left(R^2 + r^2\right)}.\frac{R}{b}$$

و بالتالي فإن الحقل الكهربائي الكلي الناتج عن كل السطح هو:

$$E = \int_0^\infty K.\frac{2\pi r.dr.\sigma.R}{\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}} = K.2\pi\sigma.R\int_0^\infty \frac{r.dr}{\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}} \Rightarrow E = K.2\pi\sigma.R\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right]_0^\infty$$

و في الأخير:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

و هذا معناه أن الحقل الكهربائي ثابت على طول المحور Oy. فحيث ما وجدت النقطة P على المحور Oy فإن الحقل الكهربائي هو نفسه.

D/ الكمون الكهربائي: (Potentiel électrique)

1/ تجوّل حقل أشعة: (Circulation d'un champ de vecteurs)

نفترض جسيمة ما تنتقل من A إلى B بإتباع المسار المنحني L داخل حقل للأشعة (قد يكون حقل الجاذبية أو حقلا كهربائيا أو حقلا مغناطيسيا...) و الذي نرمز إليه بـ $\vec{V}$.

تعريف: نسمي **التكامل المنحني لحقل الأشعة $\vec{V}$** من النقطة A إلى النقطة B على طول المسار L العبارة:

$$\boxed{\int_L \vec{V}.d\vec{l} = \int_A^B \vec{V}.d\vec{l}}$$ حيث $d\vec{l}$ هو شعاع الانتقال العنصري. (16.1)

ملاحظة: في الحالة العامة التكامل المنحني يتعلق بالمسلك.

تعريف: إذا كان المسلك أو المسار عبارة عن منحني مغلق فإن التكامل المنحني يسمى **تجول حقل الأشعة** و يكتب على الشكل:

(17.1) $\boxed{\text{Circulation de } \vec{V} = \oint \vec{V}.d\vec{l} = \vec{V} \text{ تجـــوّل}}$

لنطبق في ما يلي هذين التعريفين على الحقل الكهربائي $\vec{E}$.

2/ تجوّل الحقل الكهربائي: (Circulation du champ électrique)

نعتبر منطقة من الفضاء يسود فيها حقل كهربائي. كل جسيمة q_0 تقع في هذا الحقل تخضع لقوة كهربائية:

(18.1) $\vec{F} = q_0.\vec{E}$ ($\vec{F}$ لها نفس اتجاه $\vec{E}$ إذا كانت $q_0 \succ 0$.)

إذا لم تمسك هذه الشحنة فإنها ستنتقل في اتجاه $\vec{F}$. نفترض مجربا يريد نقل الشحنة q_0 وفق مسلك ما ببطء شديد. من أجل ذلك ، يجب أولا تطبيق قوة معاكسة مباشرة للقوة $\vec{F}$ لإبطال مفعولها ، ثم تطبيق قوة إضافية في اتجاه الانتقال المراد. في أقصى الحدود و للحصول على انتقال لا متناهي البطء، نعتبر أنه يكفي تطبيق قوة على q_0 لتعوض القوة الكهربائية مساوية لها. هذا يعني تطبيق القوة $\vec{F}_d = -q_0.\vec{E}$.

من أجل انتقال عنصري $d\vec{l}$ فإن العمل العنصري المناسب هو:

$$dW = \vec{F}_d.d\vec{l} \Rightarrow dW = -q_0\vec{E}.d\vec{l}$$

إذا أردنا نقل الشحنة q_0 وفق مسلك كيفي AB ، يجب بذل عمل W_{AB}:

(19.1) $$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d.d\vec{l} \Rightarrow W_{AB} = -\int_A^B q_0.\vec{E}.d\vec{l} \Rightarrow W_{AB} = -q_0\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

تعريف: التكامل $\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ يسمى **تجول الحقل الكهربائي** على طول المنحنى من A إلى B.

تنبيه: هذا التجول **محافظ** أي أنه لا يتعلق بالمسلك المتبع. كما أن تجول الحقل الكهربائي وفق منحى مغلق (الرجوع إلى نقطة الانطلاق) معدوم كما سنرى.

حالة خاصة: إذا كانت $|q_0| = 1C$ ، في هذه الحالة $W = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ و يسمى العمل المنجز في هذه الحالة **القوة المحركة الكهربائية** (Force électromotrice). و هكذا:

تعريف: القوة المحركة الكهربائية تساوي العمل المنجز لنقل شحنة الوحدة ($q = 1C$) على طول منحنى.

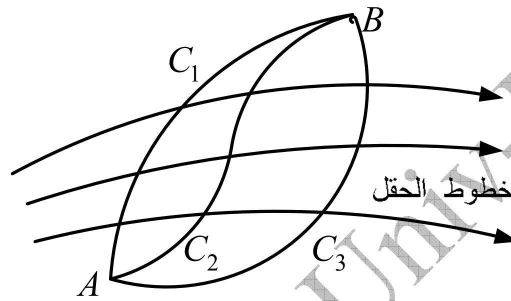
توضيح: إن كلمة "قوة" هنا مغالطة. لأننا نتكلم عن طاقة، فالعادة هي التي أورثتنا كلمة "قوة" عوض طاقة.

3/ الكمون الكهربائي: (Potentiel électrique)

في المثال المجسد على الشكل25.1 يكون لدينا:

$$\underset{\text{المسلك } C_1}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} = \underset{\text{المسلك } C_2}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} = \underset{\text{المسلك } C_3}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} \qquad (20.1)$$

هذا يعني أن العمل اللازم لنقل الشحنة من النقطة A إلى النقطة B مستقل عن المسلك المتبع. عندما لا يتعلق تجول الحقل على طول منحنى بالمسلك، و لكن يتعلق فقط بنقطة الانطلاق و نقطة الوصول ، نقول عن هذا الحقل أنه **محافظ**. و هذا هو حال الحقل الكهروساكن.



الشكل 25.1 : العمل لا يتعلق بمسار الشحنة

في العبارة (19.1) نضع :

$$\boxed{dV = -\vec{E}.d\vec{l}} \qquad (21.1)$$

V هو مقدار سلمي يسمى **الكمون الكهربائي**. نقول في هذه الحالة أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ **مشتق من الكمون** V.

الطاقة اللازمة لنقل الشحنة q_0 بين النقطتين B و A هي إذن:

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = q_0 \int_A^B dV = q_0 \left| V \right|_A^B = \left(V_B - V_A \right).q_0 \qquad (22.1)$$

المقدار $V_B - V_A$ يسمى **التوتر أو فرق الكمون** بين النقطتين B و A و نرمز له بـــ U_{BA} حيث:

$$U_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \qquad (23.1)$$

و هذا ما يؤدي بنا إلى تعريف فرق الكمون:

تعريف: فرق الكمون $\left(U_{BA}=V_B-V_A\right)$ يساوي العمل الواجب تقديمه لشحنة الواحدة (قيمتها تساوي الواحدة) لنقلها من النقطة A إلى النقطة B.

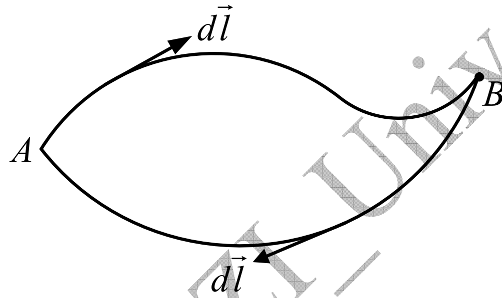
4/ تجوّل الحقل الكهربائي على طول منحنى مغلق:

إذا كان المنحنى المتبع من قبل الشحنة مغلقا، فكيف نبرهن أن تجول $\vec{E}$ معدوم؟

يكون الجواب سهلا إذا حددنا على هذا المنحنى L المغلق نقطتين A و B. الشكل 26.1.

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}+\int_B^A \vec{E}.d\vec{l} \qquad (24.1)$$

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=\left(V_A-V_B\right)+\left(V_B-V_A\right)=0 \qquad (25.1)$$



الشكل 26.1 : تجول $\vec{E}$ وفق منحنى مغلق

الخلاصة: في الكهرباء الساكنة، يكون تجول الحقل الكهربائي على طول كل منحنى مغلق معدوما.

$$\boxed{\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=0} \qquad (26.1)$$

هذه النتيجة صحيحة دائما كلما كان **الحقل مشتق من كمون**.

5/ الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q:

عرفنا أن $\vec{E}$ الناتج عن q يكون قطريا (أي يمر من الشحنة q)،

$$E\left(r\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2} \qquad (27.1)$$

لحساب V نحسب تجول $\vec{E}$ على طول نصف قطر ما:

لدينا

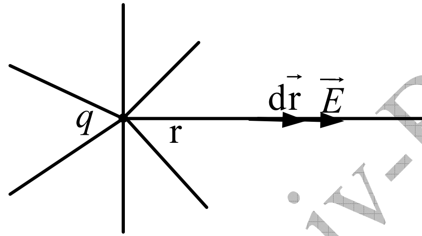
$$d\vec{l} \parallel d\vec{r}$$

و بما أن

$$d\vec{r} \parallel \vec{E}$$

فإن

$$\left.\begin{aligned} dV &= -\left(\vec{E}.d\vec{r}\right) \\ dV &= -E.dr \end{aligned}\right| \Rightarrow dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}dr \qquad (28.1)$$



الشكل 27.1 : تجول الحقل وفق القطر

ومنه

$$V(r) = \int dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r^2}dr \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r} + C^{te}} \qquad (29.1)$$

بافتراض $V = 0$ لما $r = \infty$ فإن $C^{te}=0$

في النهاية نصل إلى:

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r}} \qquad (30.1)$$

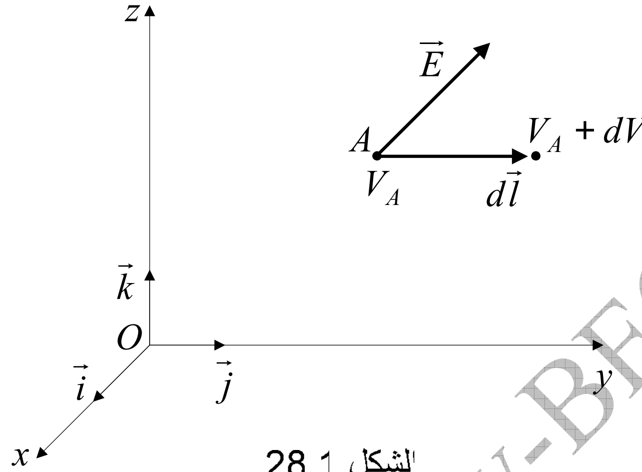
يكون الكمون ثابتا على كرات نصف قطرها r و مركزها الشحنة q. نقول أن هذه الكرات تشكل سطوح متساوية الكمون.(surfaces équipotentielles)

نبرهن أن فرق الكمون بين كرتين نصفي قطريهما r_1 و r_2 يعطى بالعبارة:

$$\boxed{V_1 - V_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]} \qquad (31.1)$$

6/ حساب $\vec{E}$ من V:

رأينا أن $dV=-\vec{E}.d\vec{l}$ ، و باعتبار معلم كارتيزي O_{xyz} ، و بافتراض أن الكمون V و الحقل $\vec{E}$ معروفان في النقطة A من الفضاء، يمكن حساب الكمون V_A+dV في كل نقطة موصولة إلى A بالشعاع العنصري $d\vec{l}$. الشكل28.1.



الشكل 28.1

حالة خاصة: نفترض أننا نبتعد عن A في جهة x (و تبقى y و z ثابتتان). و عليه فإن $d\vec{l}=\vec{i}dx$ و منه $dV=-(\vec{E}.\vec{i}).dx$ أي:

$$dV=-E_x.dx \qquad (32.1)$$

نتوصل في هذه الحالة الخاصة إلى أن:

$E_x=-\dfrac{dV}{dx}$ حيث dV هو تغير V عندما y و z تكونان ثابتتين و أن x وحدها تتغير.

هذا الشرط في الإحداثيات يتطابق مع مفهوم **الاشتقاق الجزئي**. و عليه يمكن كتابة:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (33.1)$$

بتكرار نفس التحليل من أجل y و z نجد:

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (34.1)$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (35.1)$$

بما أننا في المعلم O_{xyz} فإن:

$$\vec{E}=\vec{E_x}+\vec{E_y}+\vec{E_z}\Rightarrow \vec{E}=E_x.\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$$

و عليه:

$$\vec{E} = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \Rightarrow \vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \quad (36.1)$$

نتعرف في هذه العبارة على **مؤثر التدرج** و بالتالي فإن:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \quad (37.1)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V} \quad (38.1)$$

نفهم جيدا هنا العبارة "**الحقل الكهربائي** $\vec{E}$ **مشتق من الكمون** V" .

عبارة $\vec{E}$ بالإحداثيات الأسطوانية هي:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial \rho}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \right] \quad (39.1)$$

أما بالإحداثيات الكروية فإن $\vec{E}$ يعطى بالعبارة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \right] \quad (40.1)$$

مثال 5.1: أستنتج عبارة شعاع الحقل الكهربائي من عبارة الكمون الكهربائي التالية:
$V(x,y,z) = 3x^2y + z^2$.

أحسب شدة $\vec{E}$ في النقطة $A(1,2,-1)$.

الجواب: يكفي اشتقاق $V(x,y,z)$ باستعمال المعادلة(37.1) لنجد:

$$\boxed{\vec{E} = -\left[6xy\vec{i} + 3x^2\vec{j} + 2z\vec{k} \right]}$$

أما الشدة في النقطة $A(1,2,-1)$ فهي:

$$\vec{E} = -12\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow E = \sqrt{12^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$E=\sqrt{157} \Rightarrow \boxed{E \approx 12{,}53 V/m}$$

7/ الكمون الكهربائي الناتج عن عدة شحن نقطية متفرقة:

بما أن V مقدار سلمي فإن الكمون $V(M)$ في النقطة M الناتج عن عدة شحن يعطى بالعبارة السلمية:

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (41.1)$$

حيث r_i هي المسافة بين q_i و النقطة M علما أن q_i يمكن أن تكون موجبة أو سالبة و لذا لابد من أخذها بإشارتها(+ أو−).

8/ الكمون الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة:

في مثل هذه الحالة يكفي القيام بعملية تكاملية بعد تعيين شحنة عنصرية مناسبة dq، مثلما قمنا به في حالة الحقل الكهربائي:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (42.1)$$

نصيحة: في الحالة العامة، يستحسن حساب الكمون الكهربائي أولا ثم استنتاج شعاع الحقل الكهربائي بعملية اشتقاق.

مثال 6.1: تحمل حلقة ، مركزها O و نصف قطرها R ، شحنة q موزعة بانتظام بكثافة طولية $\lambda \succ 0$.

1/ أحسب الكمون الكهربائي الناتج في النقطة M من المحور Oy و الواقعة على البعد y من O.

2/ إستنتج شعاع الحقل في النقطة M .

الحل: بالنسبة للنقطة M المحددة فإن r,y,R ثوابت ، و اعتمادا على الشكل 29.1 و بوضع $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ يمكننا كتابة:

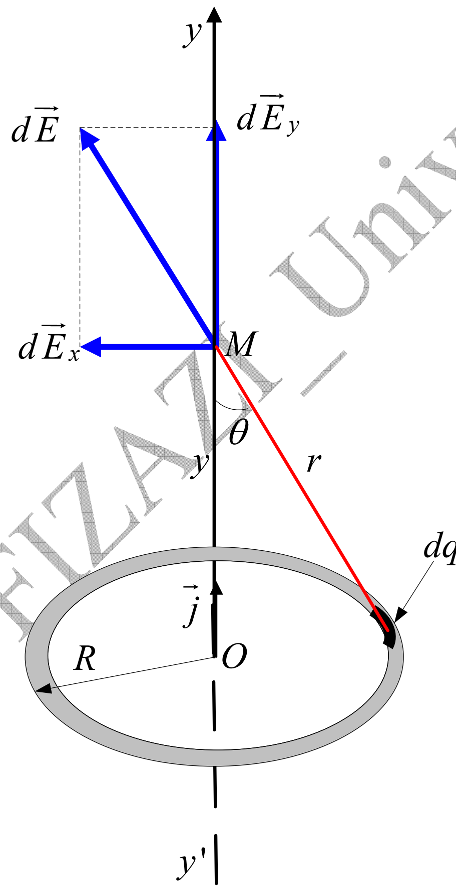
$$dV=K\frac{dq}{r} \Rightarrow \int dV=\frac{K}{r}\int dq \Rightarrow V=\frac{Kq}{r}+C^{te}$$

من الشكل نلاحظ أن $r=\sqrt{R^2+y^2}$ و بعد تعويض K و $q=\lambda.2\pi R$ نصل إلى:

$$V=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}.\frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}+C^{te}$$

يبقى الآن استنتاج E. بغية هذا يكفي اشتقاق عبارة V بالنسبة لـــ y باستغلال المعادلة (34.1):

$$E=-\frac{dV}{dy} \Rightarrow \text{E}=\frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0}.\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{3/2}}$$



الشكل 29.1: الحقل الكهروساكن في النقطة M والناتج عن الحلقة المشحونة

كما يمكن كتابة عبارة الشعاع $\vec{E}$

$$\vec{E}=\left[\frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0}.\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{3/2}}\right]\vec{j}$$

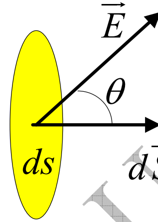
E/ التدفق الكهروساكن: نظرية غوص: (flux électrostatique et théorème de Gauss)

1/ التدفق الكهربائي:

❖ **تعريف:** نسمي تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح المقدار:

$$\Phi=\int\vec{E}.d\vec{S} \qquad (43.1)$$

$d\vec{S}$: شعاع السطح العنصري و هو دائما عمودي على السطح و موجه إلى خارج الحجم المحدود بالسطح.



الشكل 30.1: التدفق عبر سطح عنصري

إذا كانت الزاوية بين $\vec{E}$ و $d\vec{S}$ هي θ فإن:

$$\Phi=\oint_S E.dS.\cos\theta \qquad (44.1)$$

وحدة التدفق الكهربائي هي **الويبر** $(weber\ Wb)$ و معادلته ذات الأبعاد هي:

$$[\Phi]=L^3.T^{-3}.A^{-1}$$

2/ نظرية غوص:

تعبر نظرية غوص عن العلاقة بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و عدد الشحنات المتواجدة داخل الحجم المحاط بهذا السطح.

مثلا: لتكن q شحنة نقطية موجبة و التي تولد حقلا كهربائيا قطريا موجها نحو الخارج شدته $E(r)=K.\frac{q}{r^2}$.

نعتبر كسطح مغلق كرة مركزها الشحنة q. الشكل 31.1

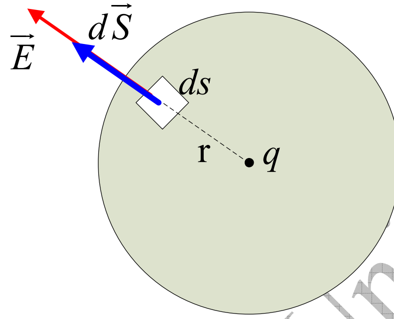
بما أننا في حالة كرة فإن كل الأشعة $d\vec{S}$ هي قطرية أي أن لها نفس حامل $\vec{E}$ و بالتالي فإن $\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=0 \Rightarrow \cos 0=1$.

التدفق الكهربائي العنصري عبر سطح عنصري $d\vec{S}$ هو:

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = E.dS \qquad (45.1)$$

بعملية تكاملية نحصل على:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S K.\frac{q}{r^2}.dS \qquad (46.1)$$



الشكل 31.1 : شحنة نقطية داخل كرة

و بما أن نصف قطر الكرة ثابت فإن:

$$\Phi = K.\frac{q}{r^2}\oint_S dS \qquad (47.1)$$

يكفي التذكر بأن المساحة الكلية للكرة هي:

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2 \qquad (48.1)$$

و بالتعويض نجد:

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad (49.1)$$

<u>النتيجة</u>: تدفق الحقل الكهربائي الصادر من كرة $(\forall r)$ يوجد في مركزها شحنة نقطية موجبة $(q \succ 0)$ يساوي $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

في حالة $q \prec 0$ ، الحقل الكهربائي $\vec{E}$ موجه نحو مركز الكرة و التدفق الكهربائي Φ يكون سالبا لأن $\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\pi \Rightarrow \cos\pi=-1$.

<u>تعميم</u>: النتيجة المتوصل إليها بالحساب من أجل شحنة واحدة هي محققة في الحالة العامة.

من أجل ذلك نعتبر سطحا مغلقا كيفيا يحتوي على n شحنة $q_1+q_2..........+q_n$ (مهما كانت إشاراتها).

نبرهن في هذه الحالة أن :

$$\Phi=\oint_S \vec{E}.d\vec{S}=\sum_{i=1}^{n} q_i.\frac{1}{\varepsilon_0}=\frac{Q_i}{\varepsilon_0} \quad [\text{Wb}] \qquad (50.1)$$

و هذه هي **نظرية غوص**:

النص: التدفق لحقل كهربائي و العابر لسطح مغلق يساوي **المجموع الجبري** للشحنات المتواجدة **داخل** الحجم المحدود من قبل السطح ، تقسيم نفاذية الفراغ ε_0.

الفائدة من هذا القانون: يسمح هذا القانون بتسهيل حساب الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع بسيط للشحنات.

نورد في ما يلي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تطبيق نظرية غوص.

3/ تطبيق نظرية غوص:

ا/ الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية:

نعتبر الشحنة الموجبة q مركزا لكرة نصف قطرها r ، $\vec{E}$ قطري و مغادر أي $\cos 0=1$:

$$\Phi=\oint_S \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi=\oint_S E.dS \Rightarrow E.S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

سطح الكرة هو $S=4\pi r^2$ و منه:

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0.S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2} \qquad (51.1)$$

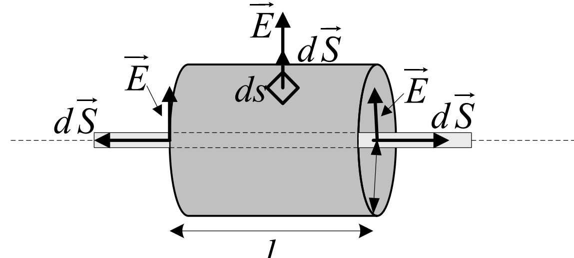
ب/ الحقل الكهربائي الناتج عن قضيب مشحون بانتظام و لا متناهي الطول:

سطح غوص الملائم لهذه الحالة هو أسطوانة محورها منطبق مع القضيب و طولها l.

هناك ثلاث سطوح: سطح قاعدي S_1، سطح قاعدي S_2، والسطح الجانبي S_L:

التدفق عبر كل السطوح المكونة لأسطوانة غوص هي مجموع التدفقات عبر كل سطح أي $\Phi=\sum\Phi_i$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} \qquad (52.1)$$



الشكل32.1: قضيب مشحون

على السطحين القاعديين (S_1) و (S_2) ، الحقل $\vec{E}$ عمودي على الشعاع $d\vec{S}$، و لذلك لا يوجد أي تدفق عبر هذين السطحين $(\cos\pi/2=0)$. أما على السطح الجانبي (S_L) الأشعة $d\vec{S}$ كلها قطرية شأنها شأن $\vec{E}$ $(\cos 0 = 1)$ و عليه:

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = E.S_L = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (53.1)$$

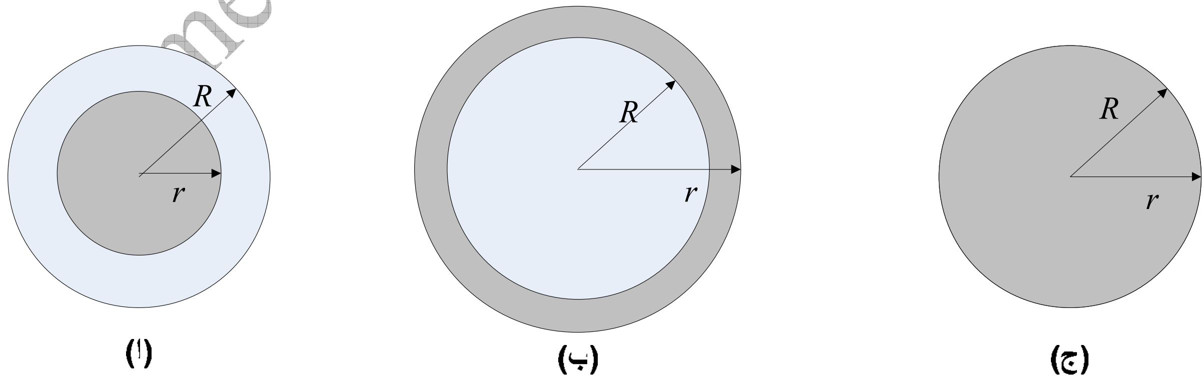
علما أن $Q_i = \lambda.l$ و $S_L = 2\pi Rl$ من ثمة :

$$E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}} \qquad (54.1)$$

ج/ الحقل الكهربائي الناتج عن كرة مصمتة مشحونة بانتظام:

مساحة غوص الملائمة هنا هي كرة نصف قطرها r. بتطبيق قانون غوص:

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (55.1)$$



الشكل33.1: كرة مصمتة مشحونة

مناقشة:

❖ $r \succ R$: الشكل 33.1 –ا– جزء فقط من الشحنة التي تحملها الكرة محصور داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r} \qquad (56.1)$$

E يتناسب طردا مع البعد r .

❖ $r \prec R$: الشكل33.1 –ب- كل الشحنة التي تحملها الكرة موجودة داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (57.1)$$

الكرة و كأنها شحنة نقطية.

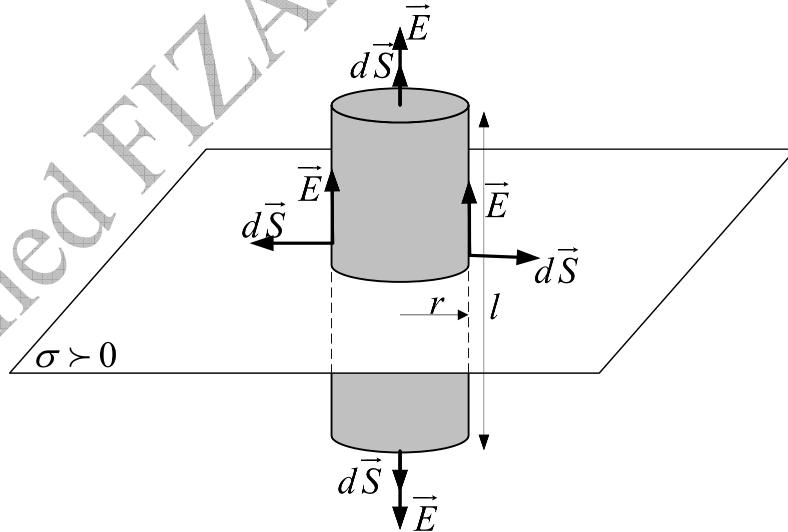
❖ $r = R$: الشكل 33.1 –ج– سطح غوص منطبق مع سطح الكرة:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.R} \qquad (58.1)$$

شدة الحقل الكهربائي على سطح الكرة ثابت.

د/ الحقل الكهربائي الناتج عن مستوى لا نهائي مشحون بانتظام:

سطح غوص الملائم هنا هو أسطوانة عمودية على السطح. هنا كذلك لدينا ثلاثة سطوح:



الشكل34.1: سطح لامتناهي مشحون

التدفق عبر السطح القاعدي S_1 : $\Phi_1 = E.S_1$،

التدفق عبر السطح القاعدي S_2 : $\Phi_2 = E.S_2$،

التدفق عبر السطح الجانبي S_L معدوم $\left(d\vec{S} \perp d\vec{E}\right)$،

إنتبه إلى أن $\vec{E_1} = -\vec{E_2}$ و لكن $E.S_1 = E.S_2$ و منه:

$$\Phi = 2E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

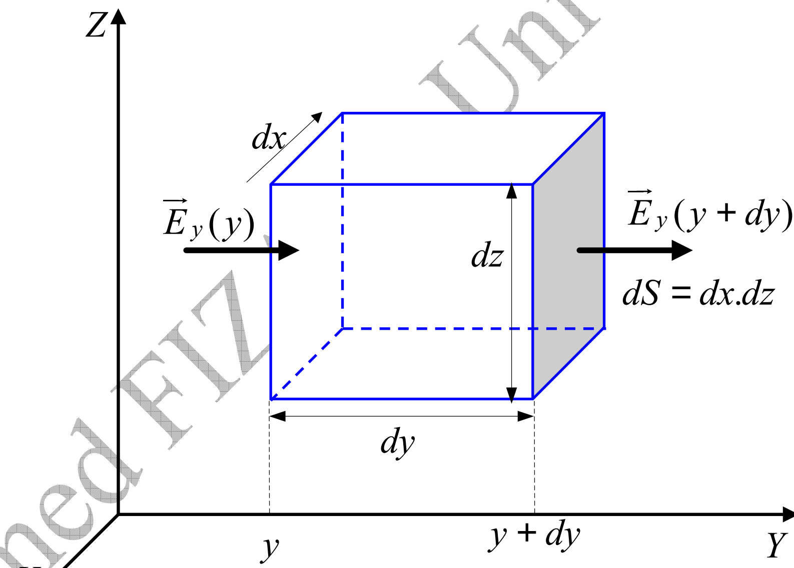
و أخيرا نلاحظ أن الحقل الكهربائي منتظم مهما كان بعد النقطة عن المستوى:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad (59.1)$$

الخلاصة: من خلال هذه الأمثلة نلاحظ أن النتائج المتحصل عليها هي مطابقة لتلك التي وجدناها في الفقرة C و لكن بأكثر سهولة ، و هذه هي الفائدة من تطبيق نظرية غوص.

4/ الشكل التفاضلي لنظرية غوص: (forme différentielle du théorème de Gauss)

الإحداثيات الديكارتية للحقل $\vec{E}$ هي $E_x\ ,E_y\ ,E_z$. لنحسب التدفق الصادر من مكعب عنصري حجمه $dv = dx.dy.dz$.(الشكل35.1).



الشكل 35.1: التدفق عبر حجم عنصري

التدفق الناتج عن المركبة E_y :

- ✓ معدوم على الوجوه: الأمامي، الخلفي، العلوي والسفلي و ذلك لأن شعاع الحقل عمودي على شعاع السطح.
- ✓ يبقى حساب التدفق على الوجهين الجانبيين ذاتي المساحة $dS = dx.dz$.

- التدفق الداخل في y سالب نظرا لأن الحقل موجه نحو داخل الحجم عكس $d\vec{S}$ $\left(\left(\overrightarrow{E_y},\overrightarrow{dS}\right)=\pi\right)$ و يساوي:

$$-E_y(y).dx.dz$$

- التدفق الخارج في $y+dy$ موجب و يساوي: $+E_y(y+dy).dx.dz$

و من هذا نحصل على التدفق عبر الوجهين الجانبيين:

$$\Phi_{dSy}=\left(E_y(y+dy)-E_y(y)\right).dx.dz$$

بما أن المسافة dy بين السطحين صغيرة جدا فإن الرياضيات تسمح لنا بكتابة:

$$E_y(y+dy)-E_y(y)=\Delta E_y=dE_y=\left(E_y\right)'.dy=\frac{\partial E_y}{\partial y}dy$$

النتيجة لكل هذا:

$$d\Phi_{dSy}=\left(E_y(y+dy)-E_y(y)\right)dx.dz=\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right).dx.dydz$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx.dy.dz=\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right).dv$$

بما أن النتائج متماثلة بالنسبة للتدفق عبر الواجهات الأربعة المتبقية، فإن التدفق الكلي للحجم العنصري dv يساوي: $d\Phi_E=d\Phi_{dS_x}+d\Phi_{dS_y}+d\Phi_{dS_z}$

$$d\Phi_{\vec{E}}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx.dy.dz=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right).dv$$

إذا كانت dq هي شحنة الحجم dv فإنه حسب نظرية غوص:

$$d\Phi_{\vec{E}}=\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv=\frac{dq}{\varepsilon_0}$$

إذا كانت ρ ترمز إلى الكثافة الشحنية الحجمية فإن $dq=\rho.dv$ و منه:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (60.1)$$

نتعرف في هذه العبارة على تباعد $\vec{E}$:

(61.1) $$\boxed{div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

و التي تعبّر عن نظرية غوص على الشكل التفاضلي.

فكيف تكون عبارة الكمون الكهربائي؟

نعرف أن $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$

أي :
$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

و منه:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

أي:

(62.1) $$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

يطلق على هذه العبارة اسم **معادلة بواسون** (équation de Poisson) التي تسمح بحساب V إذا كنا نعرف توزيع الشحنة و العكس صحيح.

مثال7.1: يسود في منطقة من الفراغ حقل كهروساكن من الشكل: $\vec{E}=x.\vec{i}+2y.\vec{j}+3\vec{k}$

أوجد عبارة الكثافة الحجمية للشحنة.

الجواب: تطبيقا للمعادلة (61.1):
$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\rho=\varepsilon_0\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]$$
$$\rho=\varepsilon_0\left[1+2+0\right]\Rightarrow\boxed{\rho=3\varepsilon_0}$$

مثال8.1: تعطى عبارة الكمون: $V(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(x^2+y^2-z^2\right)$

إستنتج عبارة كثافة الشحنة.

الجواب: من معادلة بواسون نتوصل إلى ρ :
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[2+2-2\right]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{\rho=\frac{-q}{2\pi.a^3}}$$

ماذا لو لم تكون هناك أي شحنة؟

هذا يعني أن:

$$\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \qquad (62.1)$$

تعرف هذه العبارة باسم **معادلة لابلاس**(équation de Laplace) و تستعمل خاصة في ميكانيك السوائل. يظهر في هذه المعادلة مؤثر يسمى **مؤثر لابلاس** أو **لابلاسيان** (Le Laplacien) و هو :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \qquad (64.1)$$

5/ مفهوم الزاوية الصلبة:(Notion de l'angle solide)

في الهندسة المستوية الزاوية المستوية هي التي نهتم بها في تقديراتنا. أما حين يتعلق الأمر بالهندسة الفضائية فإن الحديث يكون على الزاوية الصلبة أو المجسدة. فعلى سبيل المثال الأشعة الضوئية المنبعثة من منبع ضوئي نقطي في الظلام يتميز بمقدارين: المنحى أو الجهة (عبارة عن مستقيم) و الزاوية الأعظمية لانتشار الحزمة الضوئية حول هذا المستقيم (عبارة عن مخروط). في الحالة الأخيرة تلك الزاوية هي التي نسميها **الزاوية الصلبة أو المجسدة**. الشكل 36.1-ا-

تعريف: الزاوية الصلبة ، أو المجسدة ، العنصرية هي الفضاء الموجود داخل سطح مخروطي عنصري dS البعيد بالمسافة R عن قمة المخروط ، و تحسب بالعبارة:

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \qquad (65.1)$$

تكون الزاوية الصلبة موجبة دائما و هي مستقلة عن R. وحدتها **ستيراديان** (sr) (stéradian).

لتحديد قيمة الزاوية الصلبة Ω ، نرسم مخروطا مركزه O و نصف قطره R. مساحة الدائرة التي يقطعها المخروط هي S (الشكل 36.1-ب-) . قيمة الزاوية الصلبة هي:

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{R^2}} \qquad (66.1)$$

بالإحداثيات الكروية فإن السطح العنصري، باعتبار R ثابتة، يساوي:

$$dS = R^2 \sin\theta . d\theta . d\varphi \qquad (67.1)$$

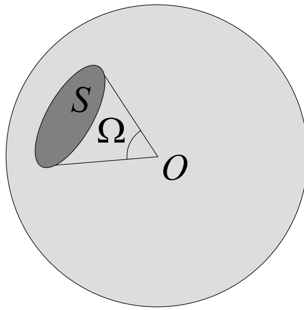
إذن الزاوية الصلبة العنصرية تكتب:

$$d\Omega = \sin\theta . d\theta . d\varphi \qquad (68.1)$$

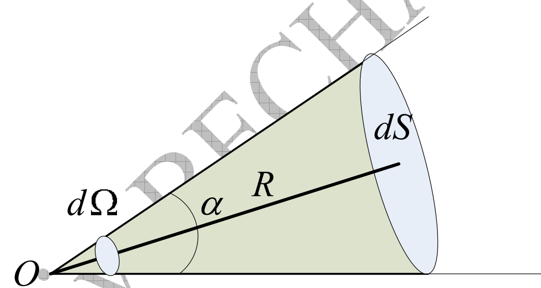
و منه فإن الزاوية الصلبة المحيطة بمخروط ، زاويته في القمة α ، تساوي:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\alpha} \sin\theta . d\theta = 2\pi\left(1-\cos\alpha\right) \qquad (69.1)$$

$$\boxed{\Omega = 2\pi\left(1-\cos\alpha\right)} \qquad (70.1)$$



(ب)



(ا)

الشكل36.1: الزاوية الصلبة

❖ **مناقشة:**

الحالة الأولى: $\boxed{\Omega = 2\pi \text{ sr}} \Leftarrow \alpha = \pi/2$ مناسب لنصف الفضاء المشكل من قبل الزاوية $\alpha = \pi/2$.

الحالة الثانية : $\boxed{\Omega = 4\pi \text{ sr}} \Leftarrow \alpha = \pi$ مناسب لكل الفضاء حول نقطة و هي أكبر قيمة للزاوية الصلبة.

الحالة العامة:

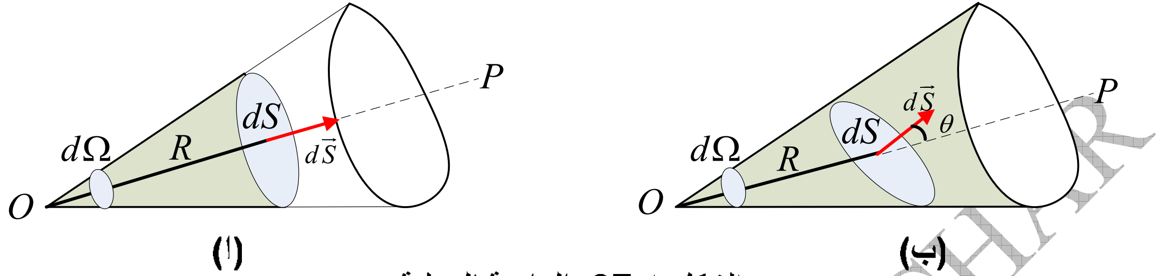
☜ إذا كان شعاع السطح العنصري موازيا للمستقيم OP (الشكل37.1−ا−) فإن $\cos\theta = 1$ ، و بالتالي الزاوية الصلبة العنصرية تساوي:

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \qquad (71.1)$$

☜ أما إذا كان شعاع السطح العنصري يصنع الزاوية θ مع المستقيم OP (الشكل37.1−ب−) فإن الزاوية الصلبة العنصرية تساوي:

$$d\Omega = \frac{dS.\cos\theta}{R^2} \qquad (72.1)$$

هذه العلاقة هي التي يجب الاحتفاظ بها لحساب الزاوية الصلبة في الحالة العامة.



الشكل 37.1: الزاوية الصلبة

❖ العلاقة بين الزاوية الصلبة و التدفق الكهربائي:

الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q على البعد r من الشحنة هو $E = K\frac{q}{r^2}$.

التدفق العنصري $d\Phi$ عبر السطح العنصري dS الموجود على البعد r من الشحنة يكتب:

$$d\Phi = E.dS = K.q\frac{dS}{r^2} \qquad (73.1)$$

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega \qquad (74.1)$$

بعملية تكاملية نحصل على التدفق الكلي العابر لكل السطح S:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega \qquad (75.1)$$

التدفق الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية عبر سطح كيفي يساوي $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ مضروب في الزاوية الصلبة Ω التي نرى من خلالها هذا السطح من الشحنة النقطية.

إذا كان السطح مغلقا و يحيط بالشحنة q فإن الزاوية الصلبة هي 4π و التدفق يساوي $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

أما إذا كان السطح مغلقا و لا يحيط بالشحنة q فإن الزاوية الصلبة معدومة $(\Omega = 0)$ و التدفق الكهربائي معدوم كذلك.

F/ ثنائي القطب الكهربائي:(Dipôle électrique)

❖ **تعريف**: يتكون ثنائي قطب كهربائي من شحنتين متساويتين و متعاكستين في الإشارة و متباعدتين بمسافة صغيرة جدا.

الشكل 18.1 يمثل خطوط الحقل لثنائي القطب الكهربائي.

❖ **تعريف**: العزم الكهربائي لثنائي القطب (moment dipolaire) هو شعاع حرّ $\vec{p}$ يساوي جداء قيمة الشحنة q في شعاع الإنتقال $\vec{a}$ للشحنة ، موجه من الشحنة الموجبة نحو الشحنة السالبة (الشكل 38.1):

$$\boxed{\vec{p} = q.\vec{a}} \qquad (76.1)$$

❖ **الكمون الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي:**

نريد حساب الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنتين $+q$ ، $-q$ في نقطة P تبعد بـــ r_1 عن الشحنة $+q$ و بـــ r_2 عن الشحنة $-q$. البعد a صغير جدا أمام المسافتين r_1 و r_2. (الشكل38.1)

$$V = \sum V_i \Rightarrow V = K\left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right] \Rightarrow V = K.q.\frac{(r_2 - r_1)}{r_2.r_1}$$

بما أن $r \succ\succ a$ فإن $r_1.r_2 \approx r^2$ و $r_2 - r_1 = a.\cos\theta$ و عليه فإن:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.a.\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^2}} \qquad (77.1)$$

❖ **الحقل الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي:**

سنحاول إيجاد E انطلاقا من المعادلة $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

☜ **بالإحداثيات المستطيلة:** اعتمادا على الشكل 38.1 نرى أن:

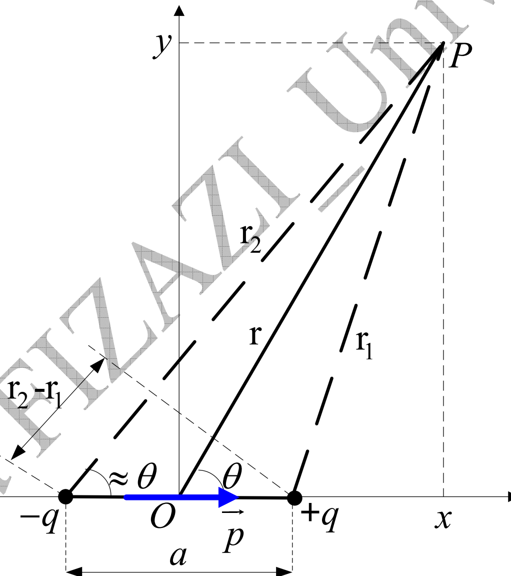
$$r_1 = \left[y^2 + (x - a/2)^2\right]^{1/2} \quad ; \quad r_2 = \left[y^2 + (x + a/2)^2\right]^{1/2}$$

و بما أن

$$V = K.q\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

إذن:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{1}{\left[y^2 + (x - a/2)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[y^2 + (x + a/2)^2\right]^{1/2}}\right] \qquad (78.1)$$



الشكل38.1: ثنائي القطب الكهربائي

يبقى الآن القيام بعملية الاشتقاق:

$$(79.1)\quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{x - a/2}{\left[y^2 + (x - a/2)^2\right]^{3/2}} - \frac{x + a/2}{\left[y^2 + (x + a/2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

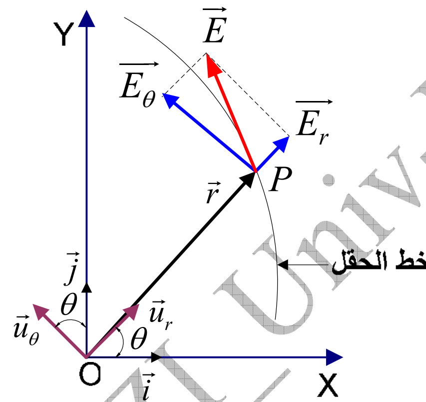
$$(80.1)\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{y}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

☜ **بالإحداثيات القطبية:**

نتبع نفس الطريقة السابقة و نعتمد على الشكل 39.1

نعرف أن: $\vec{E} = \vec{E_r} + \vec{E_\theta}$ و عليه:

$$(81.1)\quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3}\ ;\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = p.\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3}$$



الشكل 39.1: الإحداثيتان القطبيتان للحقل